



TITLE:

# ランダム媒質中の波動伝播とダイアグラム法 (統計流体力学の研究)

AUTHOR(S):

川原, 琢治

---

CITATION:

川原, 琢治. ランダム媒質中の波動伝播とダイアグラム法 (統計流体力学の研究). 数理解析研究所講究録 1976, 275: 19-53

ISSUE DATE:

1976-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105990>

RIGHT:

## ランダム媒質中の波動伝播とダイアグラム法

京大 理 川原琢治

この報告は二つの部分から成る。前半 (A) では、ダイアグラムによる 'くりこみ' 摂動の序論として、ランダム媒質中の波動伝播の取り扱いを紹介する。後半 (B) では、乱流におけるダイアグラム法に關する二つの仕事 [ Wyld (1961), Martin-Siggia-Rose (1973) ] の間の關係について述べる。

(A) ランダム媒質中の波動伝播におけるダイアグラム法

ランダム媒質における線形波動の伝播は、偶然関数を係数とする線形偏微分方程式によって記述される。適当な微小パラメターによる摂動展開でこの問題を解いて平均量や相関を求めようとする場合、次のような困難を生じる。一つは、摂動展開の発散 (secularity (永年性) 発生) の困難である。一様なランダム媒質における波動の平均量を摂動展開で求めると、有限次の摂動解は永年性を示す。永年性を生じない

近似を得る方法の一つとして、完全な擾動級数のうちの無限の部分和を取る方法が考えられる。これは、有限項で打ち切った級数は発散を示すが、その無限和は発散しないことと対応している。〔例えば、 $\exp(-\varepsilon t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 t^3 + \dots$  は、有限項で打ち切ったとき  $\varepsilon$  がいかに小さくとも  $t \rightarrow \infty$  で発散するが、無限和は  $t \rightarrow \infty$  で収束する。〕ダイアグラム法は、このような部分和をとる手続きを見通しよく行う手法の一つと言える。もう一つの困難は、ランダム媒質における波動を記述する基礎方程式が見掛け上線形であるにもかかわらず、確率変数に關しては非線形となることによるものである。そのため、線形方程式の解が係数に非線形に依存し、低次の平均量を求めようとすると、媒質のランダムさを表す偶然関数のすべての次数の平均量が必要となる。

ランダム媒質における波動伝播の問題は、このような点で乱流の問題とも類似している。

波速および振動数が空間的にランダムに変化する場合を考え、時間変化については正弦的变化を仮定すると波動方程式は Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 u(r) + k^2 n^2(r) u(r) = g(r) \quad (1)$$

に帰着される。  $k$  は自由空間での波数、  $n$  は屈折率を表し

空間座標  $r$  の偶然関数である。右辺の  $g$  はランダムでない source term を表す (Frisch, 1968; Keller, 1962, 1964; Nayfeh, 1974)。

(1) の取り扱いは  $k, n$  の大小による。ここでは、媒質のランダムな非一様性のために屈折率が一定値から僅かにずれる場合を考える。このとき、(1) は微小パラメター  $\varepsilon$  を導入して次のように書き換えることができる。

$$\nabla^2 u(r) + k^2 \{1 + \varepsilon \chi(r)\} u(r) = g(r) \quad (2)$$

(2) 式は積分方程式や Green 関数によっても表すことができる。

積分方程式形は

$$u = Mg - \varepsilon k^2 M \chi u \quad (3)$$

となる。ここに

$$Mg = \int_V g(r') G_0(r, r') dr'$$

である。  $G_0$  は自由空間 Green 関数

$$G_0(r, r') = -e^{ik|r-r'|} / 4\pi|r-r'|$$

を表す。  $V$  は積分領域を表す。

Green 関数表示では

$$G(r, r_0) = G_0(r, r_0) - \varepsilon k^2 \int_V G_0(r, r_1) \chi(r_1) G(r_1, r_0) dr_1, \quad (4)$$

あるいは、簡単に

$$G = G_0 - \varepsilon G_0 L G \quad (5)$$

と表せる。積分演算  $k^2 \int \chi(r_1) dr_1$  を記号  $L$  で表した。

[注. (1) ~ (5) の各表示においては, 各量はランダムな量の一つの実現を表す。この意味で, 確率空間における基本事象を表す  $\sigma$  を用いて, 例えば,  $n(\sigma; r)$ ,  $u(\sigma; r)$ ,  $G(\sigma; r, r_0)$  などと表すべきであるが, 記述の簡単のために  $\sigma$  を省略した。]

以下では, 主として Green 関数表示 (4) または (5) について考える。他の表示に関しても以下の議論は同様に行える。くりこみ摂動に関連する部分を取り上げよう。

くりこみ摂動の第一段階は形式的な摂動展開を行うことである。 $\varepsilon$  が小さいことから第一に考えられる近似法は, 微小パラメーター  $\varepsilon$  による摂動展開である。

(4), (5) 式から

$$G = G_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m (-G_0 L)^m G_0, \quad (6)$$

あるいは

$$\begin{aligned} G(r, r_0) = & G_0(r, r_0) - \varepsilon k^2 \int_V G_0(r, r_1) \chi(r_1) G_0(r_1, r_0) dr_1 \\ & + \varepsilon^2 k^4 \iint_V G_0(r, r_2) \chi(r_2) G_0(r_2, r_1) \chi(r_1) G_0(r_1, r_0) dr_1 dr_2 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

のような  $\varepsilon$  のべき級数解が得られる。

$G_0$  を直線 —— で,  $-L$  を点  $\bullet$  で表すことにすると, 級数解は図形表示で

$$G(r, r_0) = \frac{G_0}{r - r_0} + \frac{-L}{r - r_1 - r_0} + \frac{-L}{r - r_2 - r_1 - r_0} + \dots \quad (8)$$

となる。

(6) ~ (8) の解は, Born 展開あるいは Neumann 級数解と呼ばれる。これは, 多重散乱の効果を逐次取り入れた解になっている。

偶然関数  $\chi$  が  $|\chi| < M$  をみたし, 積分領域  $V$  の直径を  $D$  とすると, (6) ~ (8) はパラメター  $\epsilon M k^2 D^2$  による展開とみなせる。  $\epsilon M k^2 D^2 \ll 1$  なら Neumann 級数は収束するが, 一様ランダム媒質の場合には  $D \rightarrow \infty$  となるので発散する。

偶然関数  $\chi(r)$  の個々の実現に対応する  $G(r, r_0)$  を求めることよりも, 実用上興味のある量は, 平均的な波の場の振舞いや波の強度変化などである。これらの量は平均 Green 関数  $\langle G \rangle$  や共分散  $\langle G \times \bar{G} \rangle$  のような平均量が求まれば容易に求まる。

ここでは, 平均 Green 関数に対する表示をダイアグラムで求める方法について述べる。

(8) の平均は, 図形で表すと

$$\langle G \rangle = \langle \text{---} \rangle + \langle \text{---} \bullet \text{---} \rangle + \langle \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rangle + \dots \quad (9)$$

となる。これは, 後述の dressed diagram に対して bare diagram と呼ばれる。(9) 式は,  $G_0$  と  $\chi$  のべきを含む積分で与えられているが,  $G_0$  は偶然量ではないの

で、 $\chi$  の種々の次数の平均量が (9) 式に含まれることになる。 $\chi$  が平均零の一樣な偶然関数であるとし、次のようにキュムラントを導入してクラスター展開を行う。

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi \rangle &= 0, & \langle \chi(1)\chi(2) \rangle &= C_2(12), \\ \langle \chi(1)\chi(2)\chi(3) \rangle &= C_3(123), \\ \langle \chi(1)\chi(2)\chi(3)\chi(4) \rangle &= C_4(1234) + C_2(12)C_2(34) \\ &\quad + C_2(13)C_2(24) + C_2(14)C_2(23), \end{aligned} \right\} (10)$$

ダイアグラム (9) で同一クラスターに属する点を点線で結び

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= \text{---} r_0 + \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 + \text{---} r_3 \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 \\ &+ \text{---} r_4 \text{---} r_3 \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 + \text{---} r_4 \text{---} r_3 \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 \\ &+ \text{---} r_4 \text{---} r_3 \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 + \text{---} r_4 \text{---} r_3 \text{---} r_2 \text{---} r_1 \text{---} r_0 + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

を得る。これは (9) に対して dressed diagram と呼ばれる。

dressed diagram (11) において、点線を切らずに直線だけを切って二つの図形に分離できるものとそうでないものとを区別する。〔注。粒子散乱におけるダイアグラムでは、外線以外の粒子線を切断して二つに分離できるとき可約 (reducible または improper) な図形、そうでないとき

既約 (irreducible または proper) な図形と呼ばれる。

既約な部分は自己エネルギー部分と呼ばれる。]

(11) から分離できない図形 (connected diagram) をすべて取り出すと

$$Q \equiv \text{diagram with a shaded circle} = \text{diagram with a dashed arc} + \text{diagram with a dashed triangle} + \text{diagram with two dashed arcs} + \text{diagram with a dashed arc and a shaded circle} + \dots \quad (12)$$

となる。これは, mass operator あるいは wave number operator と呼ばれる。

(12) を用いると (11) 式は

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &\equiv \text{diagram with a shaded rectangle} \\ &= \text{diagram with a horizontal line} + \text{diagram with a horizontal line and a shaded circle} + \text{diagram with a horizontal line and two shaded circles} + \dots \\ &= \text{diagram with a horizontal line} + \text{diagram with a horizontal line and a shaded circle connected to a shaded rectangle} \end{aligned} \quad (13)$$

すなわち

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 Q \langle G \rangle \quad (14)$$

と書ける。これは Dyson 方程式の形になっている。

このようにして, 積分核が無限級数  $Q$  からなるような  $\langle G \rangle$  に対する積分方程式が得られた。形式的な摂動展開の図形表示から上述のように自己エネルギー部分を取り出し, Dyson 方程式を導く手順がいわゆる ‘ダイアグラムによるくりこみ’ である。



$Q$  がわかれば, Dyson 方程式 (14) は  $\langle G \rangle$  に対する線形積分方程式であるから解ける.

例えば, Fourier 変換によって

$$\left. \begin{aligned} \langle G(\tilde{k}) \rangle &= (k^2 - \tilde{k}^2)^{-1} + (k^2 - \tilde{k}^2)^{-1} Q(\tilde{k}) \langle G(\tilde{k}) \rangle, \\ (k^2 - \tilde{k}^2)^{-1} &: G_0 \text{ の Fourier 変換} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となり, 平均 Green 関数の Fourier 表示は

$$\langle G(\tilde{k}) \rangle = \frac{1}{k^2 - \tilde{k}^2 - Q(\tilde{k})} \quad (16)$$

で与えられる.

しかし, 今の場合には  $Q(\tilde{k})$  は  $\chi$  のすべての平均量を指定しないと決らない. また, 後述の乱流の問題では,  $Q(\tilde{k})$  に相当する量は未知量である. 場の理論では未知量  $Q(\tilde{k})$  を観測量で置き換えることが行われる.

[注.  $Q(\tilde{k})$  は mass の発散における mass operator に相当する. ランダム媒質における波動の場合には, 波数のくりこみに相当するので,  $Q(\tilde{k})$  は wave number operator と呼ぶ方が適切であろう.]

以上は図形によるくりこみであったが, 同様なことは平滑化の方法 (method of smearing) によっても行うことができる (Frisch, 1968).

$$G = G_0 - \varepsilon G_0 L G \quad (17)$$

を考える。  $G$  を平均  $\langle G \rangle$  とそれからのずれ  $\delta G$  とに分けて  $G = \langle G \rangle + \delta G$ ,  $\langle \delta G \rangle = 0$  と表す。

これを (17) に代入し, 平均をとり,  $\langle L \rangle = 0$  であることを考慮すると, 平均方程式

$$\langle G \rangle = G_0 - \varepsilon G_0 \langle L \delta G \rangle \quad (18)$$

を得る。さらに, もとの方程式から平均方程式を差し引いて  $\delta G = -\varepsilon G_0 L \langle G \rangle - \varepsilon G_0 \{L \delta G - \langle L \delta G \rangle\}$  (19) を得る。

(19) 式を iteration によって解くと

$$\delta G = \sum_{m=0}^{\infty} (-\varepsilon G_0)^{m+1} [L - \langle L \rangle]^m L \langle G \rangle. \quad (20)$$

これを (18) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \langle G \rangle &= G_0 + G_0 Q \langle G \rangle, \\ Q &= \langle -\varepsilon L \sum_{m=0}^{\infty} (-\varepsilon G_0)^{m+1} [L - \langle L \rangle]^m L \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式は図形によるくりこみで求めた Dyson 方程式 (14) と同形である。記号  $\langle$  は右側全体におよぶ平均を示す。

平滑化の方法では,  $G$  を平均とそれからのずれに分け, ずれの空間において iteration を行った。ずれの空間にお

ける有限次の摂動が, Dyson 方程式においては, 全摂動級数のうちから特別な形のものの無限の部分和をとったことに相当していることがわかる. すなわち, Dyson 方程式において  $Q$  の一つの項をとることは, 完全な摂動級数の中から特別な形のものを無限項取り入れたことと等価になる.

ところで, Dyson 方程式においては,  $Q$  自体もまた無限個の級数の形で与えられている. 従って, Dyson 方程式を解くためには  $Q$  を指定する必要がある. 実用上は, 何らかの物理的な仮定や  $Q$  の各項のオーダー評価などによって重要な項のみを取り入れる近似が用いられる.


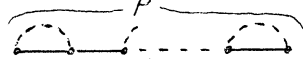
最も簡単な近似は  $Q$  の最低次だけを残すもので, Bourret の近似と呼ばれている (Bourret, 1962). これは図形で表すと, Dyson 方程式において  $\textcircled{\hspace{0.5cm}}$  の代りに  $\text{---}\text{---}$  だけを残した

$$\begin{aligned}
 \text{---}\text{---} &= \text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} \\
 &= \text{---} + \text{---}\text{---}\text{---} \\
 &\quad + \text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{22}$$

で与えられる. この近似は, 多重散乱効果のうちで引き続いて起るものが大きな相関をもつものとし, そのような寄与を取り入れた形になっている.

この近似のもとに, 相関として

$$\langle \chi(r)\chi(r') \rangle \propto \exp\{-|r-r'|/\ell\} \quad (23)$$

を与えて、(22)の各項の評価が行なわれている (Frisch, 1968). (22)で  を  $P$  個含む図形  は  $r \rightarrow \infty$  で  $r^P \exp(ikr)$  の secularity をもつことが示されている. 従って、(22)の無限級数表示の有限次までをとったとすると、それは  $r \rightarrow \infty$  で発散する. しかし、Dyson 方程式は、各項が secularity を示すものの無限項の和をとったことに相当しており、増大する secularity をもつ項の無限和は secularity を示さないことを表している.

摂動展開における無次元パラメーターは、偶然関数  $\chi(r)$  の相関長さを  $\ell$ 、考えている波の波数を  $k$  としたとき、 $R \equiv \varepsilon k^2 \ell^2$  で与えられる.  $Q$  は  $R$  のべき級数の形で与えられるので、 $R \ll 1$  では収束することが予想される. 実際、 $R \ll 1$  は Bourret 近似が成立するための必要十分条件であることが示されている. ところが、connected diagram  $Q$  の個数は  $R$  のべきとともに急激に増大する. このことによる困難も起り得る. 例えば、 $\chi$  が Gaussian であるとき、2次のキュムラントの個数は1、4次は3、6次は15、8次では105となり、connected diagram の個数も急激に増加する (Tatarskiĭ, 1964). これらの項

をすべて取り入れることは實際上不可能に近い。Dyson 方程式の  $Q$  を高次まで考慮するという方向は現実的でないように思われる。くりこみ方程式の  $Q$  としては、たかだか最初の数項までが実際に取り扱い得る範囲であらう。

低次の部分で何らかの工夫をする試みの例として Kraichnan による 'random coupling model' を引用しておこう。それは、

$$\langle G \rangle = G_0 + \langle L \langle G \rangle L \rangle \langle G \rangle, \quad (24-a)$$


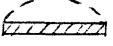
あるいは

$$\begin{aligned} \langle G \rangle = & \text{---} + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \\ & + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \\ & + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{---} + \dots, \end{aligned} \quad (24-b)$$

すなわち

$$\text{hatched rectangle} = \text{---} + \text{---} \overset{\text{dashed arc}}{\text{---}} \text{hatched rectangle} \quad (24-c)$$

さとの近似である。

これは、Bourret 近似の  を  で置き換えた形になっている。そのため  $\langle G \rangle$  に対する非線形積分方程式である。このモデルは  $R \ll 1$  のときには Bourret 近似と本質的に同等になる。

以上のように、くりこみ自体は原理的にはいくらでも高次まで行えるけれども、現実には用い得るのは最初の数項を残す

近似であり、この点でくりこみ摂動にも限界がある。ただ、単純なパラメーター摂動を有限項で打ち切った場合に *secularity* を生じるような問題に対して、くりこみ摂動は少くとも *secularity* を生じない近似を与え得る。

ダイアグラム法の方針は、まず形式的な摂動展開を行い、得られた摂動解の構造を図形で表示し、その図形を分類することにより自己エネルギー部分を導き出し、Dyson 方程式の形の表式を得ることである。このことを説明する簡単な例として、ランダム媒質中の波動の問題を取りあげた。

形式的な摂動展開をもとにして乱流における‘くりこみ’を論じたのが Wyld (1961) の仕事である。Martin, Siggia と Rose (1973) は、場の理論におけるくりこみとのアナロジーによって系統的なくりこみを行った。次に両者の関係を考える。

(B) 乱流におけるダイアグラム法

形式的な摂動展開を図形表示することによってくりこみを行う方法は, Wyld (1961) や Lee (1963) によって乱流の問題に用いられた.  $\phi^4$  近似として線形方程式の解をとり, 非線形項に関する摂動展開をある次数まで実行し, その図形表示を用いて2体速度相関と応答関数に対するくりこみ方程式 (Dyson 方程式) が導かれた. 乱流の問題では方程式が非線形であるため, 摂動展開は高次近似に進むに従って急激に複雑になり, 対応する図形の種類も急激に増加する.

このため, 実際には摂動展開は最初の次数まで実行し, 類推によって, より高次の近似に含まれる図形をも考慮したくりこみが行われるが, その際, くりこみが不十分であったり, ある図形を重複して数える (double counting の困難) ことなどが起り得る.

一方, 場の量子論におけるくりこみとのアナロジーによって, くりこみを系統的に行おうという試みが Martin - Siggia - Rose (1973) の仕事である.

乱流におけるくりこみ摂動に関する上記2種の仕事の概略を紹介し, 両者の関係についてコメントするのがこの報告後半の目的である. 結論から先に言えば, Martin 他 の主張の一つは, Wyld の結果では vertex のくりこみが不十分

であること, bare vertex の系統的なくりこみによって modified vertex を導入すれば, Wyld が特別扱いした図形は低次の図形にくりこまれること, それによって double counting の困難も避けられるということである。

### Wyld の仕事

Wyld の仕事については, 既に以前の研究会の解説でも取りあげられている (大路, 1970)。ここでは, Martin 他の仕事との比較に必要な部分の概略だけを復習する。

Fourier 変換されたモデル方程式

$$(-i\omega + \nu k^2) v(k, \omega) = f(k, \omega) + \frac{g}{(VT)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ \omega_1+\omega_2=\omega}} v(k_1, \omega_1) v(k_2, \omega_2) \quad (1)$$

を考える。これは, 速度成分を 1 成分とした点で Navier Stokes 方程式の簡単化になっている。  $f(k, \omega)$  は一様・定常な Gaussian 偶然外力を表す。4元ベクトルを簡単のため  $(k, \omega) = k$  で表し, propagator

$$S(k) = (-i\omega + \nu k^2)^{-1} \quad (2)$$

を導入すると, (1) 式は

$$\left. \begin{aligned} v(k) &= v_0(k) + S(k) \gamma_3 \sum_{k_1+k_2=k} v(k_1) v(k_2), \\ v_0(k) &= S(k) f(k), \quad \gamma_3 = \frac{g}{(VT)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



と書ける. propagator は  $S^*(k) = S(-k)$ , ( $*$ : 複素共役) となることを注意したい. このことを Wyld は図形上で区別しなかった.

(3) 式を非線形相互作用の強さ  $\gamma_3$  で展開 (Reynolds 数展開) し,

$$v(k) = v_0(k) + v_1(k) + v_2(k) + \dots \quad (4)$$

と表し, これを (3) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} v_1(k) &= 2S(k) \gamma_3 \sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{2} v_0(k_1) v_0(k_2), \\ v_2(k) &= 2S(k) \gamma_3 \sum_{k_1+k_2=k} v_0(k_1) 2S(k_2) \times \\ &\quad \times \gamma_3 \sum_{k_3+k_4=k_2} \frac{1}{2} v_0(k_3) v_0(k_4), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を得る.

これは, 図形表示では Fig. 1 で表される. 実線 — は  $S(k)$  を, 点・は  $\gamma_3$  を, 点線 ---- は  $v_0$  を表す.

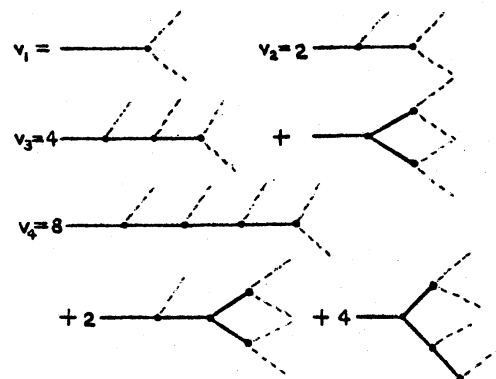



FIG. 1. Diagrams corresponding to the terms of the perturbation series (5)

maximal randomness (Gaussian 偶然外力) の仮定により, 2 次の速度相関は

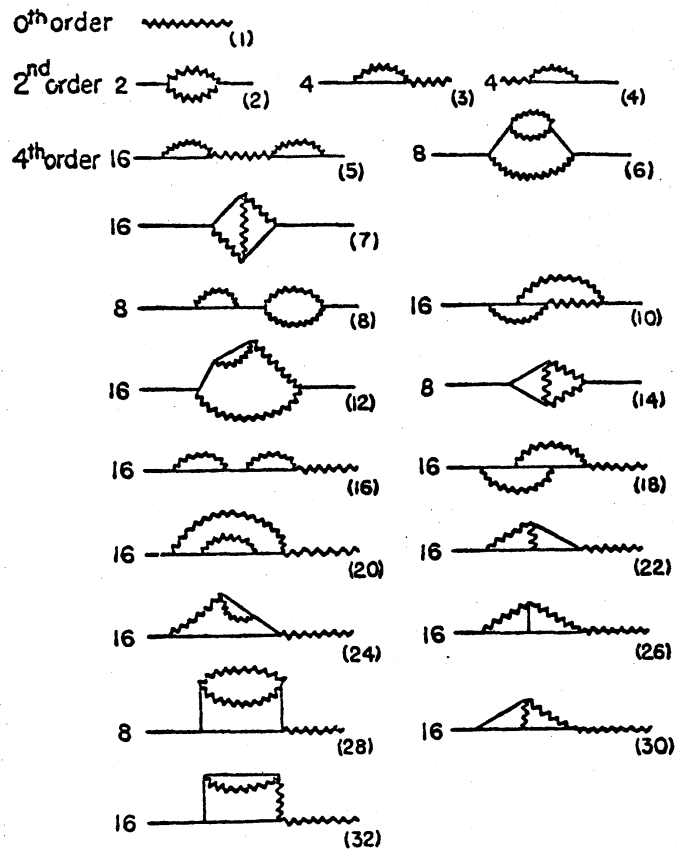
$$\begin{aligned}
 U(k) &\equiv \overline{v(k)v^*(k)} \\
 &= \overline{v_0(k)v_0^*(k)} \\
 &\quad + \left\{ \overline{v_0(k)v_1^*(k)} + \overline{v_1(k)v_0^*(k)} + \overline{v_1(k)v_1^*(k)} \right\} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

相関の第0近似  $U_0(k) \equiv \overline{v_0(k)v_0^*(k)}$  を波線  で表し、

(6) に Fig. 1 を用いると、2次の速度相関 (true correlation)  $U(k)$  は直線と点と波線を組み合わせた図形で表現できる。 propagator  $S(k)$  と同様に直線が真っ直ぐ貫く図形を全て集めたものを modified propagator  $S'(k)$ , vertex  $\gamma_3$  に対応して、三つの足をもつ図形を集めたものを modified vertex

operator  $\Gamma(k, k')$  と呼ぶ。 2次の速度相関  $U(k)$  と



Diagrams 9,11,...,33 are inversions of diagrams 8,10,...,32 about a vertical axis.

FIG. 2. Diagrams for the correlation function  $U(k)$  to fourth order

modified propagator  $S'(k)$  の 4 次  $O(\gamma_3^4)$  まで, modified vertex

operator  $\Gamma(k, k')$

の 5 次  $O(\gamma_3^5)$  まで

の図形は Wyld に

よって Fig. 2 ~ 4

で与えられている.


次に, 完全な 2 体

相関関数 (true

correlation)  $U(k)$

を  で,

modified propagator

$S'(k)$  を  で,

modified vertex

operator  $\Gamma(k, k')$


を  で表す.

Fig. 2, 3, 4 の各

図形を分類し, 太線

で置き換えることの

できる図形を太線に

置き換えるくりこみ

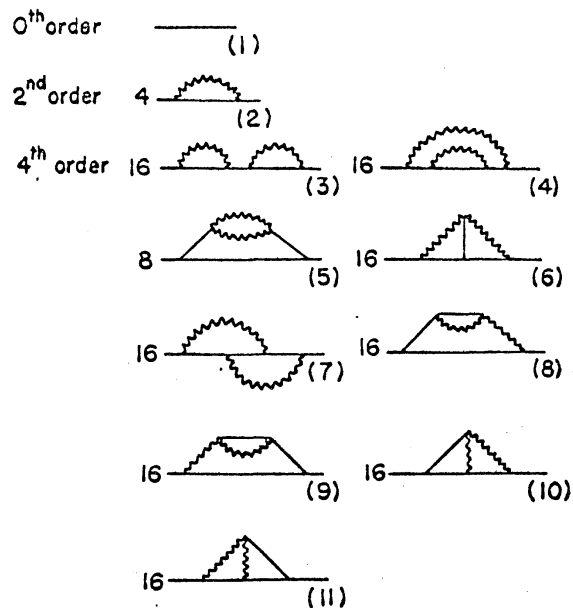
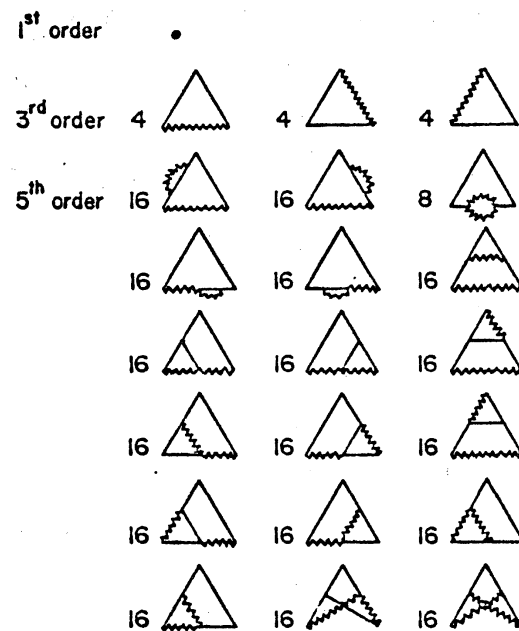


FIG. 3. Diagrams for the modified propagator function  $S'(k)$  to fourth order



+ 2 Rotations of each. 5<sup>th</sup> order diagram  
(through 120°, 240°)

FIG. 4. Diagrams for the vertex operator  $\Gamma(k, k')$  to fifth order



となる。(2)により  $S^*(k) = S(-k)$  であるから, Wyld のように  $S(k)$  と  $S^*(k)$  を同一の図形  $\text{——}$  で表すのではなく,  $\text{~~~~}$  または  $\text{——}$  で表して複素共役を区別すべきである。このことは Martin 他の仕事との比較からも言える。

従って, 例えば  $\overline{v_0(k)v_0^*(k)} = S(k)F(k)S^*(k)$  の図形は Wyld の表示では

$$\text{~~~~} = \text{——} F(k) \text{——}$$

となっていたが, 複素共役を区別する表示では

$$\text{~~~~} = \text{~~~~} F(k) \text{~~~~}$$

となる。

Wyld の図形表示では, 複素共役を区別しなかったので, bare vertex  $v_0$  で交わる図形 (bare vertex から出る足) の組み合わせが

$$\text{——} \begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \searrow \end{array}, \quad \text{——} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}, \quad \text{——} \begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \searrow \end{array} \quad (8)$$

の3種類可能であったのに対し, 複素共役を区別して  $S(k)$  を  $\text{~~~~}$  で表すと, (8) 図は

$$\text{~~~~} \begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \searrow \end{array}, \quad \text{~~~~} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}, \quad \text{~~~~} \begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \searrow \end{array} \quad (9)$$

となり, bare vertex においては常に直線1と波線2が

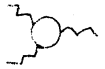
交わることになる。

このことを考慮して Wyld のくりこみを書き直すと、2体速度相関と modified propagator の  $O(\gamma_3^4)$  まで, modified vertex の  $O(\gamma_3^3)$  までの図形は次のように表せる。

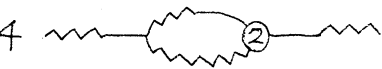
$$\begin{aligned}
 \text{~~~~~} &= \text{~~~~~} F(k) \text{~~~~~} + 2 \text{~~~~~} \textcircled{1} \text{~~~~~} \\
 &+ 4 \text{~~~~~} \textcircled{2} \text{~~~~~} + 2 \text{~~~~~} \textcircled{3} \text{~~~~~} \\
 &+ O(\gamma_3^6) , \quad (10)
 \end{aligned}$$

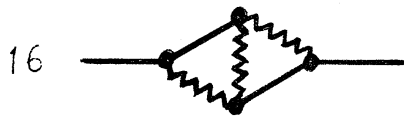
$$\begin{aligned}
 \text{~~~~~} &= \text{~~~~~} + 4 \text{~~~~~} \textcircled{1} \text{~~~~~} \\
 &+ 2 \text{~~~~~} \textcircled{2} \text{~~~~~} + O(\gamma_3^6) , \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \text{~~~~~} + 4 \left( \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \right) \\
 &+ O(\gamma_3^5) , \\
 \textcircled{2} &= 4 \left( \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \right) + O(\gamma_3^5) , \\
 \textcircled{3} &= 4 \text{~~~~~} + O(\gamma_3^5) .
 \end{aligned} \quad (12)$$

bare vertex では必ず 2 本の波線が交わることから、  
propagator だけからなる modified vertex は存在しない。  
従って、 のように 3 本の波線の足が出る modified vertex は存在しない。

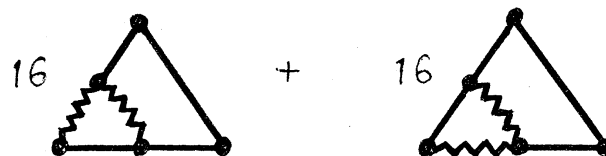
ダイアグラム表示 (10) ~ (12) は後述の Martin 他の結果との比較のために示した。  $S(k)$  と  $S^*(k)$  を図形上で区別し、vertex として (12) のような 3 種類の modified vertex を導入することにより double counting の困難も避けることができる。


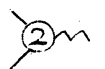
また、Wyld が特別扱いした図形 (例えば, Fig. 2 の図 (7) など) は (10) では  の図形に含まれる。  
従って  $O(\epsilon_3^4)$  までのくりこみでは Fig. 5 の図形



は不要である。

さらに, Fig. 6 における



の形の図形は vertex として  の形のもの, すなわち (12) の  を導入すれば不要となる。

### Martin-Siggia-Rose の仕事

Martin 他 (1973) の仕事は, Navier-Stokes 方程式に従う場に共役な場を導入し, 場の量子論におけるくりこみとのアナロジーを完全にすることによって系統的なくりこみを行おうとするものである.

Navier-Stokes 方程式に従う場  $\psi$  と共役場  $\hat{\psi}$  に対する方程式は

$$\dot{\psi}(1) = \chi_1(1) + \chi_2(12)\psi(2) + \chi_3(123)\psi(2)\psi(3), \quad (13)$$

$$\dot{\hat{\psi}}(1) = -\chi_2(21)\hat{\psi}(2) - 2\chi_3(231)\hat{\psi}(2)\psi(3) \quad (14)$$

で表される. 3 数の数字の繰り返しは対応する変数に関する積分を表し,  $\det$  は時間微分を表す.

[注. 方程式 (13), (14) を導き出すような Lagrangian は, 例えば

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \psi(1)\dot{\hat{\psi}}(1) + \chi_1(1)\hat{\psi}(1) + \chi_2(12)\hat{\psi}(1)\psi(2) \\ & + \chi_3(123)\hat{\psi}(1)\psi(2)\psi(3) \end{aligned}$$

で与えられる. このとき,  $\psi(1)$ ,  $\hat{\psi}(1)$  に対応する正準運動量  $\mu(1)$ ,  $\hat{\mu}(1)$  は  $\mu(1) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}(1) = 0$ ,  $\hat{\mu}(1) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\hat{\psi}}(1) = \psi(1)$  で与えられる. Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\psi}}(1)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\hat{\psi}(1)} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(1)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi(1)} = 0$$



は Lagrangian の定義から，当然 (13), (14) 式を与えなければならぬ．　ところで， $\mathcal{L}$  の才 1 項を例えば  $-\dot{\psi}(1)\hat{\psi}(1)$  で置き換えても (13), (14) を導き出す Lagrangian になっている．　このとき，正準運動量は  $\mu(1) = -\hat{\psi}(1)$ ,  $\hat{\mu}(1) = 0$  となる．　このように，与えられた運動方程式を導き出すような Lagrangian は一般に一義的にはきまらない．　一義的でない正準変数からの量子化法，また，場の量子論とのアナロジーによるくりこみに必要な交換関係・反交換関係の導入に關する詳細は場の理論に不案内な筆者には不明である．　ここでは，Martin 他の仕事の粗筋と，その結果の Wyld の仕事との比較に話を限る．】

適当な交換関係などを導入した後， $\psi, \hat{\psi}$  をまとめて  $\Phi$  で表すと (13), (14) 式は

$$\dot{\Phi}(1) = \gamma_1(1) + \gamma_2(12)\Phi(2) + \gamma_3(123)\Phi(2)\Phi(3) \quad (15)$$

と書ける．【注．(15) 式右辺才 3 項の非線形項の係数は Martin 他論文では  $\frac{1}{2}\gamma_3\Phi\Phi$  となっているが，Wyld の結果との比較のため (15) のようにとった．　そのため，以下の表示は， $\gamma_3$  に關して Martin 他原論文とファクター 2 だけ異なる．】

(15) から相関量に対する関係式を導くために，仮想外力

$\eta(1)$  によって, 母関数

$$S = \exp [\Phi(1) \eta(1)] \quad (16)$$

を導入する.

初期アンサンブルに対する平均を  $\langle \rangle$  で表し, Green 関数を次のように定義する.

$$\left. \begin{aligned} G_1^\eta(1) &= \frac{\delta \ln \langle S \rangle}{\delta \eta(1)} = \frac{\langle S \Phi(1) \rangle}{\langle S \rangle}, \\ G_2^\eta(12) &= \frac{\delta^2 \ln \langle S \rangle}{\delta \eta(1) \delta \eta(2)} = \frac{\langle S \Phi(1) \Phi(2) \rangle}{\langle S \rangle} - G_1^\eta(1) G_1^\eta(2). \end{aligned} \right\} (17)$$

(17) は  $\eta = 0$  のときキュムラントを表す. 以下,  $G_1^\eta$ ,  $G_2^\eta$  などの  $\eta$  を省略して  $G_1$ ,  $G_2$  と書く.  $G_1$ ,  $G_2$  は方程式を通して仮想外力  $\eta$  に依存することに注意.

(15) に仮想外力  $\eta$  をつけ加えた式に  $S$  を掛けて平均をとり,  $\langle S \rangle$  で割ると

$$\begin{aligned} \dot{G}_1(1) &= \gamma_1(1) + \eta(1) + \gamma_2(12) G_2(2) \\ &\quad + \gamma_3(123) [G_2(23) + G_1(2) G_1(3)] \end{aligned} \quad (18)$$

を得る.

$G_1$  が方程式を通して  $\eta$  に依存することを考慮し, (18) 式を  $\eta(1')$  で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{G}_2(11') &= \delta(11') + \chi_2(12)G_2(21') \\
&+ 2\chi_3(123)G_1(3)G_2(21') \\
&+ \chi_3(123)\frac{\partial}{\partial\eta(1')}G_2(23) . \quad (19)
\end{aligned}$$

(19) 式右辺の最終項は3次のキュムラントに相当する項である。この項を  $\Sigma(12)G_2(21')$  の形に書き換える。すなわち、3次のキュムラントの項を適当な操作によって自己エネルギーの形に表現する。これがくりこみに他ならない。

$\Sigma$  は場の理論における renormalized self-energy に相当する。

(19) 式最終項を  $\Sigma(12)G_2(21')$  の形に変形するために、次の汎関数微分の規則が用いられる。

$$\left. \begin{aligned}
(i) \quad \frac{\partial G_2(12)}{\partial\eta(3)} &= \frac{\partial G_1(4)}{\partial\eta(3)} \frac{\partial G_2(12)}{\partial G_1(4)} = G_2(34) \frac{\partial}{\partial G_1(4)} G_2(12) , \\
(ii) \quad G_2^{-1}(12)G_2(23) &= \delta(13) \text{ の両辺を } G_1(4) \text{ で微分して} \\
\frac{\partial G_2(23)}{\partial G_1(4)} &= -G_2(12)G_2(23) \frac{\partial G_2^{-1}(12)}{\partial G_1(4)} .
\end{aligned} \right\} (20)$$

$$\Gamma_3(123) \equiv - \frac{\partial G_2^{-1}(23)}{\partial G_1(1)} \quad (21)$$

で定義される  $\Gamma_3$  は renormalized vertex と呼ばれる。

$\Gamma_3$  と  $\Sigma$  の関係は

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(12) &= \gamma_3(134)G_2(35)G_2(46)\Gamma_3(562), \\ \Gamma_3(123) &= 2\gamma_3(123) \\ &\quad + \frac{\delta\Sigma(23)}{\delta G_2(45)}G_2(46)G_2(57)\Gamma_3(671) \end{aligned} \right\} (22)$$

で与えられる。(19)式最終項を(20)の(i)(ii)を用いて変形し、 $\Sigma(12)G_2(21')$ の形に書き換え、(21)を用いると(22)の第1式が導かれる。一方、(19)式に $G_2^{-1}(1'4)$ を掛けて $G_2^{-1}$ を求め、それを $G_1$ で微分し、定義(21)を用いると(22)の第2式が得られる。

(18), (19), (22)で $\eta \rightarrow 0$ とあいて、最終的に

$$\begin{aligned} \dot{G}_1(1) &= \gamma_1(1) + \gamma_2(12)G_1(2) \\ &\quad + \gamma_3(123)[G_2(23) + G_1(2)G_1(3)], \end{aligned} \quad (23-a)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_2(11') &= \delta(11') + \gamma_2(12)G_2(21') \\ &\quad + 2\gamma_3(123)G_1(3)G_2(21') + \Sigma(12)G_2(21'), \end{aligned} \quad (23-b)$$

$$\Sigma = \gamma_3 G_2 G_2 \Gamma_3, \quad (23-c)$$

$$\Gamma_3 = 2\gamma_3 + \frac{\delta\Sigma}{\delta G_2} G_2 G_2 \Gamma_3 \quad (23-d)$$

を得る。(23)がくりこみ方程式である。 $\Sigma$ と $\Gamma_3$ に対する(23-c), (23-d)式は連立方程式の形になっており、(19)式

の最終項を書き換えただけであるから、この限りでは厳密であると考えられる。連立方程式 (23) を解くことにより相関量  $G_1, G_2$  を求めることができる。(23-c), (23-d) は、実際には、近似的に取り扱われる。その方法として、bare vertex  $\gamma_3$  による展開と renormalized vertex  $\Gamma_3$  による展開が考えられる。Martin 他のも主張は、‘電荷のくりこみ’に相当する  $\Gamma_3$  による展開が望ましいということらしい。ここでは、まず Wyld の仕事との関係を見るために  $\gamma_3$  展開による近似について考える。



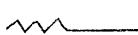
一様・定常な Gaussian 偶然外力のもとでの定常乱流を考える。一様性より  $G_1 \equiv 0$  としてよいので、(23) は  $G_2$  だけに対する関係式になる。 $G_2$  はもとの量  $\psi, \hat{\psi}$  に対して次の2種のキュムラント

$$\left. \begin{array}{l} \text{2次の速度相関: } \langle \psi \psi \rangle \equiv G_{11} , \\ \text{propagator: } \langle \psi \hat{\psi} \rangle \equiv G_{12} \end{array} \right\} \quad (24)$$

を表す。

(23-b) 式は上記2種のキュムラントに対する次の形の Dyson 方程式を与える。

$$\left. \begin{array}{l} \overset{G_{11}}{\text{~~~~~}} = \text{~~~~~} F \text{~~~~~} + \text{~~~~~} (\Sigma_{22}) \text{~~~~~} , \\ \overset{G_{12}}{\text{~~~~~}} = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} (\Sigma_{21}) \text{~~~~~} . \end{array} \right\} \quad (25)$$

ここに,  $F$  は外力の2次の相関を表す,  と  は, それぞれ (24) の  $G_{11}$ ,  $G_{12}$  の Fourier 表示の図形を表し, Wyld の表示の true correlation  $U(k)$ , modified propagator  $S'(k)$  であり,  $\Gamma_3$  は Wyld の表示の modified vertex に対応する.  は  $S(k)$  を表す.

一方,  $\gamma_3$  に関する最低次の近似では (23-c), (23-d) は

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_3 &= 2\gamma_3 + O(\gamma_3^3), \\ \Sigma &= 2\gamma_3 G_2 G_2 \gamma_3 + O(\gamma_3^4) \end{aligned} \right\} \quad (26-a)$$

となる. これを図形で表すと

$$\left. \begin{aligned} -(\Sigma_{21}) &= 2 \text{---} \text{blob} \text{---} + 2 \text{---} \text{blob} \text{---} = 4 \text{---} \text{blob} \text{---} \\ -(\Sigma_{22}) &= 2 \text{---} \text{blob} \text{---} \end{aligned} \right\} \quad (26-b)$$







(25) に (26-b) を用いると, この近似のもとでは

$$\left. \begin{aligned} \text{wavy line} &= \text{wavy line} \text{---} F \text{---} \text{wavy line} \\ &\quad + 2 \text{---} \text{blob} \text{---} \text{wavy line} \\ \text{double wavy line} &= \text{wavy line} \text{---} + 4 \text{---} \text{blob} \text{---} \text{wavy line} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる. これは Kraichnan による direct-interaction



今の場合には最初から true correlation と modified propagator (太線図形) で表されている点が異なる。 Wyld のくりこみを修正した (10)~(12) において, 細線図形をすべて太線で置き換える (さらにくりこみを行う) と係数も含んで (25), (28) と完全に一致する。

Wyld のくりこみ結果 (Fig. 5 ~ Fig. 7) と (25), (28) との比較から, Martin 他は次のような指摘をしている。 Wyld のくりこみの  $O(\gamma_3^4)$  以上に対する推測は正しくない。 とくに, Fig. 2 のダイアグラム (7) (あるいは, Fig. 5 の ) , Fig. 6 の  のような図形は, vertex として (28-b) の ,  に相当する図形  や  を導入することにより  $\gamma_3$  展開の低次近似では必要でなくなる。 この点で, Wyld の仕事はくりこみが不十分であった。 Wyld のくりこみの修正で示したように, propagator の複素共役を区別することにより, 以上のようなくりこみの不十分さは回避できる。

以上は自己エネルギー部分を  $\gamma_3$  展開で近似する方法で, Wyld のくりこみとの比較のために取りあげられた。

Martin 他は,  $\gamma_3$  展開ではなく, true vertex  $\Gamma_3$  による展開が望ましいと主張している。

(23-c), (23-d) の連立方程式



$$\Gamma_3 = 2\gamma_3 + \frac{\delta \Sigma}{\delta G_2} G_2 G_2 \Gamma_3, \quad \Sigma = \gamma_3 G_2 G_2 \Gamma_3$$

を近似するのに,  $\Gamma_3$  による展開を行うと

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_3 &= 2\gamma_3 + \Gamma_3 G_2 \Gamma_3 G_2 \Gamma_3 G_2 + O(\Gamma_3^5), \\ \Sigma &= \frac{1}{2} \Gamma_3 G_2 G_2 \Gamma_3 - \frac{1}{2} \Gamma_3 G_2 G_2 \Gamma_3 G_2 G_2 \Gamma_3 + O(\Gamma_3^6) \end{aligned} \right\} (29-a)$$

を得る.

図形表示では

$$\left. \begin{aligned} \text{Diagram 1} &= 2 \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + O(\Gamma_3^5), \\ \text{Diagram 4} &= \frac{1}{2} \text{Diagram 5} - \frac{1}{2} \text{Diagram 6} + O(\Gamma_3^6). \end{aligned} \right\} (29-b)$$

$\equiv$  は  $G_2$  を表し,  $\text{Diagram 3}$  または  $\text{Diagram 6}$  が入る.

これは,  $\Gamma_3 (G_2 G_2 G_2)^{\frac{1}{2}} \equiv \bar{\Gamma}_3$ ,  $\gamma_3 (G_2 G_2 G_2)^{\frac{1}{2}} \equiv \bar{\gamma}_3$

と置くと  $\bar{\Gamma}_3$  を一つのパラメーターとする展開

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Gamma}_3 &= 2\bar{\gamma}_3 + \bar{\Gamma}_3^3 + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_3^5 + \dots, \\ G_2^{\frac{1}{2}} \Sigma G_2^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_3^2 - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_3^4 - \frac{1}{4} \bar{\Gamma}_3^6 + \dots \end{aligned} \right\} (30)$$

とみなすことができる.

$\bar{\Gamma}_3$  による展開は, 場の理論における '電荷のくりこみ' に対応し, 分布の Gaussian からのずれの補正に対応するということである.

Martin 他の主張をまとめると, (i) Wyld の結果は vertex のくりこみが不十分である, (ii) 3種類の modified vertex を導入することによって Wyld が特別扱いした図形は不要になる, (iii) 系統的な方法であるから高次までくりこみが可能で double counting の困難なども避けられる, (iv) '電荷のくりこみ' に相当する  $\Gamma_3$  展開を考えるべきである。

以上のように, Martin 他の仕事により,  $\chi_3$ ,  $\Gamma_3$  いずれの展開についても高次までくりこみを進めることが原理的には可能であることが示された。しかし, くりこみは進めれば進めるほどよくなるのか, どのオーダーまでのくりこみ方程式を用いるのが適当であるのか, またそれに対するクリティオンはあるのかなど筆者には不明な点が多い。

また, くりこみ方程式は非常に複雑な連立方程式になっているので, その解析は, 例えば数値計算に依るとしても, 現実には可能であるのは, せいぜい Kraichnan の近似か, あるいは  $\chi_3$  展開の次のオーダーまでとった (12), (15) (あるいは (25), (28)) の連立方程式系までのように思われる。

$\Gamma_3$  展開による近似の有効性などについても筆者には不明な点が多い。

## 参考文献

(A):

- (1) R.C.Bourret: Stochastically perturbed fields, with applications to wave propagation in random media. *Nuovo Cimento* 26 (1962) 1 - 31.
- (2) U.Frisch: Wave propagation in random media, in *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, ed. by A.T.Bharucha=Reid ( Academic, New York, 1968 ) 75 - 198.
- (3) J.B.Keller: Wave propagation in random media. *Proc. Symp. Appl. Math.* 13 (1962) 227 - 246. Stochastic equations and wave propagation in random media. *Proc. Symp. Appl. Math.* 16 (1964) 145 - 170. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- (4) A.H.Nayfeh: *Perturbation Methods*. ( John Wiley & Sons, New York, 1974 ) 360 - 382.
- (5) V.I.Tatarskiĭ: Propagation of electromagnetic waves in a medium with strong dielectric-constant fluctuations. *Soviet Phys. JETP* 19 (1964) 946 - 953.

(B):

- (1) M.J.Beran: *Statistical Continuum Theories*. Monographs in statistical physics. vol. 9 ( Interscience, New York, 1968 ) 385 - 400.
- (2) 金田行雄: Liouville 方程式の初期値問題の近似計算. 数理解析研究所講究録 244 連続体力学における非線型方程式の近似解法 1975年 117-128頁.
- (3) L.L.Lee: A formulation of the theory of isotropic hydro-magnetic turbulence in an incompressible fluid. *Ann. Phys.* 32 (1965) 292 - 321.
- (4) P.C.Martin, E.D.Siggia, and H.A.Rose: Statistical dynamics of classical systems. *Phys. Rev. A.* 8 (1973) 423 - 437.

- (5) 大路通雄： 乱流における非線形相互作用の構造。  
数理解析研究所講究録 97 層流の安定性に関する非線  
形問題研究会報告集 1970年 83 - 98頁。
- (6) A.V.Shut'ko: Statistical theory of turbulence. Soviet  
Phys. Doklady 9 (1965) 857 - 859.
- (7) 高橋 康： 物性研究者のための場の量子論 I・II。  
培風館 1974年, 1976年。
- (8) H.W.Wyld, Jr.: Formulation of the theory of turbulence in  
an incompressible fluid. Ann. Phys. 14 (1961) 143 - 165.